ТЕМА: «ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТИ»

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вписанная окружность**  Окружность вписана в многоугольник, если она касается всех его сторон.  **В любой треугольник можно вписать окружность.**  **Центр вписанной** в треугольник окружности лежит **в точке пересечения биссектрис** треугольника. | | |  |
| **Если окружность вписана в четырёхугольник**, то суммы противоположных сторон этого четырёхугольника равны:  **AB + CD = BC + AD.** | | |  |
| **Описанная окружность**  Окружность описана около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на окружности.  **Около любого треугольника можно описать окружность.**  **Центр описанной** около треугольника лежит **в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам** треугольника. | | |  |
| **Если окружность описана около четырёхугольника**, то суммы его противоположных углов равны:  **∠A + ∠C = ∠B + ∠D.** | | |  |
| **Пример 1. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника АВС, если его катеты равны 24 и 10 см.** | | | |
| Дано: ΔАВС – п/уг.;  АВ – гипотенуза;  АС = 24 см;  ВС = 10 см;  Окр. (О; r) – опис-я. | |  | |
| Найти: r - ? | |
| **Решение:**  **1)** Если ∠С – прямой, т. С лежит на окружности (треугольник вписанный) ⇒ ∠АСВ – вписанный, опирается на полуокружность АВ (Следствие 2 из теоремы о вписанном угле) ⇒ АВ (гипотенуза) – диаметр описанной окружности ⇒ О ∈ АВ, **радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности равен половине гипотенузы**;  **2)** ΔАВС – прямоугольный, ∠С – прямой, по теореме Пифагора:  АВ2 = АС2 + ВС2 = 576 + 100 = 676;  АВ = 26 (см);  **3)** r = AB = 13 (см).  Ответ: r = 13 см. | | | |
| **Пример 2. По данным рисунка найдите радиус вписанной в равнобедренный треугольник окружности.** | | | |
| Дано: ΔАВС – р/б;  АС – основ-е;  ВН – высота;  Окр. (О; r) – впис.;  АВ = 13 см;  АС = 10 см. |  | | |
| Найти: r - ? |
| Решение:  **1)** ΔАВС – р/б, АС – основание, ВН – высота ⇒ ВН – биссектриса (по свойству высоты р/б треугольника, проведённой к основанию) ⇒ О ∈ ВН (центр вписанной в треугольник окружности);  **2)** Пусть ОН ⊥ АС, ОК, ON – радиусы вписанной окружности ⇒ ON ⊥ ВС, OK ⊥ АВ (радиусы, проведённые в точку касания, по свойству касательной), ОН = ON = OK;  **3)** ΔАВС – р/б, АС – основание, ВН – высота ⇒ ВН – медиана (по свойству высоты р/б треугольника, проведённой к основанию) ⇒ АН = НС = 5 см;  **4)** ΔАВН – прямоугольный, по теореме Пифагора: АВ2 = ВН2 + АН2;  169 = ВН2 + 25;  ВН = 12 (см).  **5)** AK = AH = 5 см (свойство отрезков касательных) ⇒ ВК = 13 – 5 = 8 (см);  **6)** ΔОВК – прямоугольный (OK ⊥ АВ), ОК = OH ⇒ BO = BH – OH = 12–ОК;  По теореме Пифагора:  ВО2 = ОК2 + ВК2;  (12 – ОК)2 = ОК2 + 64;  144 – 24ОК + ОК2 = ОК2 + 64;  80 = 24ОК  ОК = (см).  **Ответ:** радиус вписанной окружности - см. | | | |
| **Пример 3. Найдите площадь равнобедренного треугольника с основанием АВ = 6, если расстояние от центра описанной окружности до АВ равно 4.** | | | |
| Дано: ΔАВС – р/б;  АВ – основ-е;  CD – высота;  Окр. (О; r) – опис-я.;  АВ = 6;  OD = 4. |  | | |
| Найти: SABC - ? |
| **Решение:**  **1)** СD – высота, проведённая к основанию равнобедренного ΔАВС ⇒ СD – серединный перпендикуляр к АВ ⇒ О ∈ CD;  **2)** О – центр описанной около равнобедренного ΔАВС окружности ⇒ АО = СО = ВО – радиусы описанной окружности;  **3)** ΔAOD – прямоугольный (CD – высота), AD = . По теореме Пифагора:  АО2 = AD2 + DO2 = 9 + 16 = 25;  AO = 5;  **4**) СD = OD + CO = 4 + 5 = 9;  **5)** .  **Ответ:** . | | | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Пример 4. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если боковая сторона трапеции 10 см, меньшее основание равно 4 см.** | | | |
| Дано: ABCD – р/б трап.;  BC, AD – основания;  Окр. (О; r) – впис.;  ВС = 4 см;  АВ = 10 см. |  | | |
| Найти: r - ? |
| Решение.  **1)** ABCD – р/б трап-я, ВС, AD – основания; Окр.(О; r) – впис-я ⇒ ОР = ОН = ОМ = ON = r, ОР ⊥ ВС, ОН ⊥ АD, ON⊥AB, OM⊥CD (по свойству касательной), РН – высота трапеции;  **2)** Окр.(О, r) – вписанная ⇒ АВ + СD = BC + AD (свойство четырёхугольника, в который вписана окружность);  20 = 4 + AD; AD = 16.  **3)** Проведем ВК, СЕ – высоты трапеции. ΔАВК = ΔCDE (прямоугольные, по гипотенузе (АВ = CD) и острому углу (∠А = ∠D)) ⇒ AK = ED.  ВСЕК – прямоугольник ⇒ ВС = ЕК = 4 (см);  АК = ED = (AD – EK) : 2 = (16 – 4) : 2 = 6 (см).  По теореме Пифагора (ΔАВК):  АВ2 = АК2 + ВК2;  100 = 36 + ВК2;  ВК2 = 64;  ВК = 8 (см).  **4)** ВК = РН = 8 см, ОР = ОН = 4 см.  **Ответ:** радиус вписанной окружности – 4 см. | | | |
| **Задачи для самостоятельного решения:** | | | |
|  | |  |  |