ТЕМА: «ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТИ»

|  |  |
| --- | --- |
| **Вписанная окружность**Окружность вписана в многоугольник, если она касается всех его сторон.**В любой треугольник можно вписать окружность.** **Центр вписанной** в треугольник окружности лежит **в точке пересечения биссектрис** треугольника. |  |
| **Если окружность вписана в четырёхугольник**, то суммы противоположных сторон этого четырёхугольника равны:**AB + CD = BC + AD.** |  |
| **Описанная окружность**Окружность описана около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на окружности.**Около любого треугольника можно описать окружность.****Центр описанной** около треугольника лежит **в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам** треугольника. |  |
| **Если окружность описана около четырёхугольника**, то суммы его противоположных углов равны:**∠A + ∠C = ∠B + ∠D.** |  |
| **Пример 1. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника АВС, если его катеты равны 24 и 10 см.** |
| Дано: ΔАВС – п/уг.;АВ – гипотенуза;АС = 24 см;ВС = 10 см;Окр. (О; r) – опис-я. |  |
| Найти: r - ? |
| **Решение:****1)** Если ∠С – прямой, т. С лежит на окружности (треугольник вписанный) ⇒ ∠АСВ – вписанный, опирается на полуокружность АВ (Следствие 2 из теоремы о вписанном угле) ⇒ АВ (гипотенуза) – диаметр описанной окружности ⇒ О ∈ АВ, **радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности равен половине гипотенузы**;**2)** ΔАВС – прямоугольный, ∠С – прямой, по теореме Пифагора:АВ2 = АС2 + ВС2 = 576 + 100 = 676;АВ = 26 (см);**3)** r = $\frac{1}{2}$AB = 13 (см).Ответ: r = 13 см. |
| **Пример 2. По данным рисунка найдите радиус вписанной в равнобедренный треугольник окружности.** |
| Дано: ΔАВС – р/б;АС – основ-е;ВН – высота;Окр. (О; r) – впис.;АВ = 13 см;АС = 10 см. |  |
| Найти: r - ? |
| Решение:**1)** ΔАВС – р/б, АС – основание, ВН – высота ⇒ ВН – биссектриса (по свойству высоты р/б треугольника, проведённой к основанию) ⇒ О ∈ ВН (центр вписанной в треугольник окружности);**2)** Пусть ОН ⊥ АС, ОК, ON – радиусы вписанной окружности ⇒ ON ⊥ ВС, OK ⊥ АВ (радиусы, проведённые в точку касания, по свойству касательной), ОН = ON = OK;**3)** ΔАВС – р/б, АС – основание, ВН – высота ⇒ ВН – медиана (по свойству высоты р/б треугольника, проведённой к основанию) ⇒ АН = НС = 5 см;**4)** ΔАВН – прямоугольный, по теореме Пифагора: АВ2 = ВН2 + АН2;169 = ВН2 + 25;ВН = 12 (см). **5)** AK = AH = 5 см (свойство отрезков касательных) ⇒ ВК = 13 – 5 = 8 (см);**6)** ΔОВК – прямоугольный (OK ⊥ АВ), ОК = OH ⇒ BO = BH – OH = 12–ОК;По теореме Пифагора:ВО2 = ОК2 + ВК2; (12 – ОК)2 = ОК2 + 64; 144 – 24ОК + ОК2 = ОК2 + 64; 80 = 24ОКОК = $3\frac{1}{3}$ (см).**Ответ:** радиус вписанной окружности - $3\frac{1}{3}$ см. |
| **Пример 3. Найдите площадь равнобедренного треугольника с основанием АВ = 6, если расстояние от центра описанной окружности до АВ равно 4.** |
| Дано: ΔАВС – р/б;АВ – основ-е;CD – высота;Окр. (О; r) – опис-я.;АВ = 6;OD = 4. |  |
| Найти: SABC - ? |
| **Решение:****1)** СD – высота, проведённая к основанию равнобедренного ΔАВС ⇒ СD – серединный перпендикуляр к АВ ⇒ О ∈ CD;**2)** О – центр описанной около равнобедренного ΔАВС окружности ⇒ АО = СО = ВО – радиусы описанной окружности;**3)** ΔAOD – прямоугольный (CD – высота), AD = $\frac{1}{2}AB=3$. По теореме Пифагора:АО2 = AD2 + DO2 = 9 + 16 = 25;AO = 5;**4**) СD = OD + CO = 4 + 5 = 9;**5)** $S\_{ABC}=\frac{1}{2}AB∙CD= \frac{1}{2}∙6∙9=27$.**Ответ:** $S\_{ABC}=27$. |

|  |
| --- |
| **Пример 4. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если боковая сторона трапеции 10 см, меньшее основание равно 4 см.** |
| Дано: ABCD – р/б трап.;BC, AD – основания;Окр. (О; r) – впис.;ВС = 4 см;АВ = 10 см. |   |
| Найти: r - ? |
| Решение.**1)** ABCD – р/б трап-я, ВС, AD – основания; Окр.(О; r) – впис-я ⇒ ОР = ОН = ОМ = ON = r, ОР ⊥ ВС, ОН ⊥ АD, ON⊥AB, OM⊥CD (по свойству касательной), РН – высота трапеции;**2)** Окр.(О, r) – вписанная ⇒ АВ + СD = BC + AD (свойство четырёхугольника, в который вписана окружность); 20 = 4 + AD; AD = 16.**3)** Проведем ВК, СЕ – высоты трапеции. ΔАВК = ΔCDE (прямоугольные, по гипотенузе (АВ = CD) и острому углу (∠А = ∠D)) ⇒ AK = ED.ВСЕК – прямоугольник ⇒ ВС = ЕК = 4 (см);АК = ED = (AD – EK) : 2 = (16 – 4) : 2 = 6 (см).По теореме Пифагора (ΔАВК):АВ2 = АК2 + ВК2;100 = 36 + ВК2;ВК2 = 64;ВК = 8 (см).**4)** ВК = РН = 8 см, ОР = ОН = 4 см.**Ответ:** радиус вписанной окружности – 4 см. |
| **Задачи для самостоятельного решения:** |
|  |  |  |