Что нужно знать наизусть, чтобы сдать модуль «Геометрия»

Общие сведения

1. Угол – геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух луче, исходящих из неё.

2. Две геометрические фигуры называются равными, если их можно совместить наложением.

3. Середина отрезка – точка, делящая отрезок на два равных отрезка.

4. Биссектриса угла – луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла.

Перпендикулярные прямые

5. Смежные углы - два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой. Сумма смежных углов равна 180°.

6. Вертикальные углы – два угла, стороны каждого из которых являются продолжениями сторон другого угла. Вертикальные углы равны.

7. Две прямые перпендикулярны, если при пересечении они образуют четыре прямых угла.

8. Если две прямые перпендикулярны третьей, то они параллельны между собой.

Треугольники

9. Треугольник – геометрическая фигура, полученная, если соединить три точки, не лежащие на одной прямой, отрезками.

10. В равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы, против соответственно равных углов лежат равные стороны.

11. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (1 признак равенства треугольников).

12. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (2 признак равенства треугольников).

13. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (3 признак равенства треугольника).

14. Перпендикуляр к прямой – отрезок, опущенный из точки, не лежащей на прямой, на данную прямую перпендикулярно к ней. Конец перпендикуляра, лежащий на прямой – основание перпендикуляра.

15. Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.

16. Медиана треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

17. Биссектриса треугольника – отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны.

18. Высота треугольника – перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.

19. Равнобедренный треугольник – треугольник, у которого две стороны равны (определение). Равные стороны – боковые, третья сторона – основание.

20. Равносторонний треугольник – треугольник, у которого все стороны равны.

21. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны (свойство равнобедренного треугольника).

22. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является высотой и медианой (свойство равнобедренного треугольника).

23. Если в треугольнике два угла равны, то такой треугольник равнобедренный (признак).

24. Окружность – геометрическая фигура, состоящая из всех точек, расположенных на заданном расстоянии от данной точки. Эта точка называется «центр окружности». Любой отрезок, соединяющий центр с точкой на окружности называется радиусом окружности.

Параллельные прямые

25. Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

26. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (1 признак параллельности прямых).

27. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны (2 признак параллельности прямых).

28. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны (3 признак параллельности прямых).

29. Через точку, не лежащую на данной прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной (аксиома параллельных прямых).

30. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую (следствие 1 из аксиомы).

31. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны (следствие 2 из аксиомы).

32. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

33. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

34. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.

35. Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой прямой (следствие из теоремы о накрест лежащих углах).

Соотношения между сторонами и углами треугольника

36. Сумма углов треугольника равна 180° (теорема о сумме углов треугольника).

37. Внешний угол треугольника – угол смежный с каким-нибудь углом треугольника.

38. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (теорема о внешнем угле).

39. Остроугольный треугольник – все углы треугольника – острые.

40. Тупоугольный треугольник – один угол тупой, два других – острые.

41. Прямоугольный треугольник – один угол прямой, два других – острые. Сторона, лежащая против прямого угла – гипотенуза; две другие стороны – катеты.

42. В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; 2) против большего угла лежит большая сторона (теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника).

43. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

44. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон (неравенство треугольника).

45. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

46. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.

47. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то он лежит против угла 30°.

48. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны (1 признак равенства прямоугольных треугольников).

49. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны (2 признак равенства прямоугольных треугольников).

50. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны (3 признак равенства прямоугольных треугольников).

51. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны (4 признак равенства прямоугольных треугольников).

52. Наклонная к прямой – отрезок, проведённый из точки, не лежащей на прямой к любой точке прямой, кроме основания перпендикуляра.

53. Расстояние от точки к прямой – длина перпендикуляра, проведенного из точки к прямой.

54. Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой (свойство параллельных прямых).

55. Расстояние между параллельными прямыми – расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой.

Четырёхугольники

56. Многоугольник – это фигура, составленная из отрезков так, что смежные отрезки не лежат на одной прямой, а несмежные не пересекаются.

57. Периметр многоугольника – сумма длин всех сторон.

58. Соседние вершины многоугольника – две вершины, принадлежащие одной стороне.

59. Диагональ многоугольника – отрезок, соединяющий две несоседние вершины.

60. Выпуклый многоугольник – многоугольник, который лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящий через две его соседние вершины.

61. Сумма углов выпуклого n-угольника равна (n – 2) ∙ 180º.

62. Две несмежные стороны четырёхугольника называются противоположными.

63. Сумма углов выпуклого многоугольника равна 360º.

64. Параллелограмм – это выпуклый четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (определение, можно использовать как признак).

65. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны (1 свойство).

66. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам (2 свойство).

67. Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник – параллелограмм (1 признак параллелограмма).

68. Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то четырёхугольник параллелограмм (2 признак параллелограмма).

69. Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник – параллелограмм (3 признак параллелограмма).

70. Трапеция – выпуклый четырёхугольник, у которого две стороны параллельны (основания), а две другие сторон – не параллельны (боковые стороны).

71. Трапеция равнобедренная, если её боковые стороны равны.

72. Трапеция прямоугольная, если один из её углов – прямой.

73. Теорема Фалеса. Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

74. Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые (определение).

75. Диагонали прямоугольника равны (особое свойство прямоугольника).

76. Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм – прямоугольник (признак прямоугольника).

77. Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны (определение).

78. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам (особое свойство ромба).

79. Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны (определение).

80. Все углы квадрата прямые (1 свойство). Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам (2 свойство).

81. Две точки симметричны относительно прямой, если эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку, концами которого являются эти точки. Или: Две точки А и А1 называются симметричными относительно прямой *а*, если эта прямая проходит через середину отрезка АА1 и перпендикулярна к нему.

82. Фигура обладает осевой симметрией, если для каждой точки фигуры, симметричная ей точка относительно некоторой прямой *а* также принадлежит этой фигуре. Прямая *а* – ось симметрии фигуры.

83. Две точки А и А1 симметричны относительно точки О, если О – середина отрезка АА1.

84. Фигура обладает центральной симметрией относительно точки О, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки О также принадлежит этой фигуре.

Площадь

85. Площадь многоугольника – это величина той части плоскости, которую занимает многоугольник.

86. За единицу измерения площадей принят квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков (1 см2 – квадрат со стороной 1 см, 1м2 – квадрат со стороной 1 м и т.д.).

87. Площадь любой фигуры выражается положительным числом, которое показывает, сколько раз единица измерения и её части укладываются в данной фигуре.

88. Равные многоугольники имеют равные площади (1 свойство площадей).

89. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников (2 свойство площадей).

90. Площадь квадрата равна квадрату его стороны (3 свойство площадей).

91. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

92. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

93. Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

94. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

95. Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

96. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

97. Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.

98. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

99. Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Подобные треугольники

100. Отношение отрезков – это отношение их длин.

101. Отрезки пропорциональны, если равны отношения их длин.

102. Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого (определение подобных треугольников).

103. Коэффициент подобия – число, равное отношению сходственных сторон.

104. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

105. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны (1 признак подобия треугольников).

106. Если две стороны одно треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны (2 признак подобия треугольников).

107. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны (3 признак подобия треугольников).

108. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

109. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от его вершины.

110. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

111. Отрезок ХУ называется средним пропорциональным (средним геометрическим) между отрезками АВ и CD, если .

112. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.

113. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла.

114. Синус острого угла прямоугольного треугольника – отношение противолежащего катета к гипотенузе.

115. Косинус острого угла прямоугольного треугольника – отношение прилежащего катета к гипотенузе.

116. Тангенс острого угла прямоугольного треугольника – отношение противолежащего катета к гипотенузе.

117. Основное тригонометрическое тождество: .

Окружности

118. Окружность – это замкнутая кривая линия, все точки которой находятся на равном расстоянии от одной точки, называемой центром окружности.

119. Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность имеют две общие точки.

120. Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют одну общую точку.

121. Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.

122. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания (свойство касательной к окружности).

123. Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной (признак касательной к окружности).

124. Дуга окружности – часть окружности между двумя точками окружности (∪АВ).

125. Полуокружность – дуга окружности, концы которой соединяет отрезок, являющийся диаметром окружности.

126. Центральный угол – это угол, вершина которого находится в центре окружности, а стороны пересекают её.

127. Градусная мера дуги окружности, меньшей или равной полуокружности, равна величине центрального угла, опирающегося на эту дугу. Градусная мера дуги окружности, большей полуокружности, равна разности 360° и соответствующего центрального угла.

128. Сумма градусных мер двух дуг, имеющих общие концы, равна 360°.

129. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (теорема о вписанном угле).

130. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (1 следствие из теоремы о вписанном угле).

131. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, – прямой (2 следствие из теоремы о вписанном угле).

132. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды (теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд).

133. Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон. Обратно: каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалённая от сторон угла, лежит на его биссектрисе (теорема о биссектрисе угла).

134. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (следствие из теоремы о биссектрисе угла).

135. Серединный перпендикуляр к отрезку – это прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему.

136. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Обратно: каждая точка, равноудалённая он концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему (теорема о серединном перпендикуляре к отрезку).

137. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (следствие из теоремы о серединном перпендикуляре к отрезку).

138. Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке (теорема о пересечении высот треугольника).

139. Четыре замечательные точки треугольника: точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис, точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, точка пересечения высот треугольника (или их продолжений).

140. Вписанная окружность – окружность, которой касаются все стороны многоугольника. Такой многоугольник называется описанным (определение).

141. В любой треугольник можно вписать окружность и при том только одну (теорема об окружности, вписанной в треугольник).

142. В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны (свойство описанного четырёхугольника). Обратно: если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

143. Описанная окружность – окружность, на которой лежат все вершины многоугольника. Такой многоугольник называется вписанным (определение).

144. Около любого треугольника можно описать окружность и при том только одну (теорема об окружности, описанной около треугольника).

145. В любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180° (свойство вписанного четырёхугольника). Обратно: если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

Векторы

146. Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется направленным отрезком или вектором (определение) (.

147. Любая точка плоскости также является вектором, называемым нулевым.

148. Длина или модуль вектора – длина соответствующего отрезка ().

149. Длина нулевого вектора равна нулю.

150. Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору (определение).

151. Коллинеарные векторы, направленные одинаково – сонаправленные векторы ().

152. Коллинеарные векторы, направленные противоположно – противоположно направленные векторы ().

153. Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.

154. От любой точки можно отложить вектор, равный данному вектору, и при том только одну.

155. Если от точки А отложить вектор , равный вектору , а от конца получившегося вектора отложить вектор , равный вектору , то вектор – это сумма векторов (правило треугольника).

156. Для любых векторов 1) (переместительный закон); 2) (сочетательный закон).

157. Чтобы сложить неколлинеарные векторы , нужно отложить от одной точки А векторы и и построить на этих векторах параллелограмм, считая их его смежными сторонами, тогда вектор, имеющий начало в т. А и конец в противоположной вершине параллелограмма будет суммой этих векторов (правило параллелограмма).

158. Правило многоугольника – нахождение суммы нескольких векторов, когда в конец первого вектора является началом второго, конец второго вектора является началом третьего и т.д.

159. Разность векторов – это такой вектор , сумма которого с вектором равна вектору (определение).

160. Для любых векторов справедливо равенство .

161. Произведением ненулевого вектора на число k называется такой вектор , длина которого равна , причём векторы сонаправлены, если k ≥ 0 и противоположно направлены при k < 0. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

162. Для любых чисел k, l и любых векторов справедливы равенства: 1) (сочетательный закон); 2) (первый распределительный закон); 3) .

163. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна его половине (теорема о средней линии трапеции).

Метод координат

164. Если векторы и , то существует такое число k, что .

165. Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

166. Векторы, длины которых равны 1 (единичные векторы), причём совпадает по направлению с осью ОХ, вектор совпадает по направлению с осью ОУ – координатные векторы (орты).

167. Координаты вектора в данной системе координат – это коэффициенты разложения *х* и *у* вектора по координатным векторам .

168. Координаты равных векторов соответственно равны.

169. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

170. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

171. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

172. Пусть точка М – произвольная точка в координатной плоскости ХОУ. Тогда вектор – радиус-вектор точки М, причём координаты точки М равны соответствующим координатам вектора .

173. Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

174. Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

175. Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов координат вектора: .

176. Расстояние между двумя точками равно корню квадратному из суммы квадратов разности соответствующих координат этих точек: .

177. Уравнение с двумя переменными *х* и *у* называется уравнением линии L, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой линии.

178. В прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса r с центром в точке С(*хо*; *уо*) имеет вид: .

179. В прямоугольной системе координат уравнение прямой имеет вид: .

**Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов**

180. Для любого угла α из промежутка 0°≤ α ≤ 180° синусом угла α называется ордината *у* точки М, лежащей на единичной полуокружности, а косинусом угла α - абсцисса точки М.

181. Для любого угла α из промежутка 0°≤ α ≤ 180° справедливы неравенства: 0 ≤ sin α ≤ 1, -1 ≤ cos α ≤ 1.

182. Тангенсом угла α ≠ 90° называется отношение синуса α к косинусу α: .

183. Основное тригонометрическое тождество: .

184. Формулы приведения: 1) для 0°≤ α ≤ 90°; 2) для 0°≤ α ≤ 180°.

185. Координаты произвольной точки А на координатной плоскости вычисляется как произведение расстояния от точки А до начала координат и sinα (координата *у*), cosα (координата *x*).

186. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними (теорема о площади треугольника).

187. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов (теорема синусов).

188. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности (обобщённая теорема синусов).

189. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними (теорема косинусов или обобщённая теорема Пифагора).

190. Угол между векторами – это угол между лучами, содержащими эти векторы.

191. Векторы перпендикулярны, если угол между ними равен 90°.

192. Скалярное произведение двух векторов – произведение их длин на косинус угла между ними.

193. Скалярное произведение векторов выражается формулой .

194. Ненулевые векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда (Следствие 1).

195. Косинус угла α между ненулевыми векторами выражается формулой: .

195. Свойства скалярного произведения векторов:

Длина окружности и площадь круга

196. Правильный многоугольник – это выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны. (Примеры: равносторонний треугольник, квадрат)

197. Если сумма углов выпуклого n-угольника равна (n – 2) ∙ 180º, то, т.к. все углы в правильном многоугольнике равны, каждый угол .

198. Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

199. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

200. Следствие 1. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в его серединах.

201. Следствие 2. Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник. Эта точка называется центром правильного многоугольника.

202. Площадь правильного многоугольника равна половине произведения периметра на радиус вписанной окружности: .

203. Сторона правильного многоугольника , где R – радиус окружности, описанной около правильного многоугольника.

204. Радиус окружности, вписанной в правильный многоугольник, , где R – радиус окружности, описанной около правильного многоугольника.

205. Отношение длины окружности к её диаметру есть одно и то же число для всех окружностей - π ≈ 3,1415926….

206. Формула для вычисления длины окружности .

207. Формула для вычисления длины дуги окружности с градусной мерой α: .

208. Формула для вычисления площади круга радиуса R: .

209. Формула для вычисления площади кругового сектора радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой α: .